Cours 15 – 06/11/2024

8. L’oscillateur harmonique

8.1. L’oscillateur harmonique – modèle

8.2. L’oscillateur harmonique

8.3. L’oscillateur harmonique – traitement par l’énergie

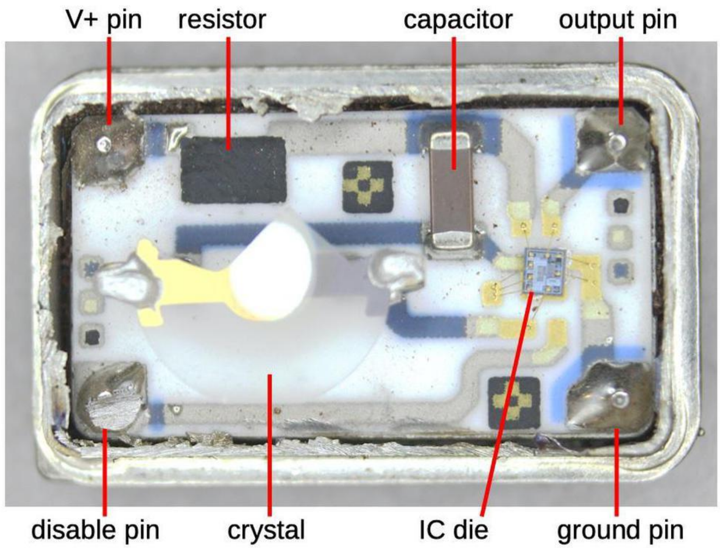
8. L'oscillateur harmonique

- Le mouvement oscillatoire est très fréquent dans la nature.
- Un système qui oscille est appelé un « oscillateur ».

Quelques exemples de <u>phénomènes oscillatoires</u>

- Voix (cordes vocales)
- Pendule
- Ressort
- Montre mécanique
- Montre à quartz
- Circuit électrique RLC (radio)

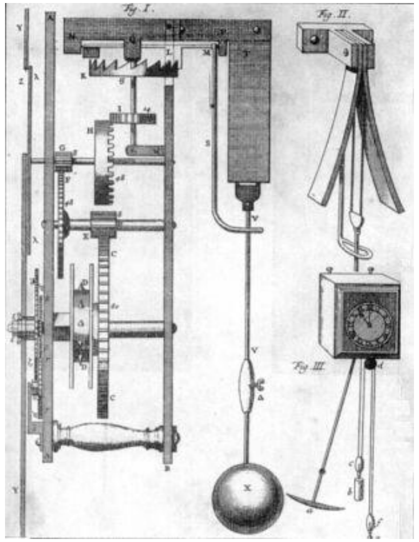
Montre à quartz (2 MHz)



<u>Mouvement oscillatoire</u> ⇨ **réaction d'un système soumis à une force de rappel non constante avec dissipation de l'énergie faible ou nulle**

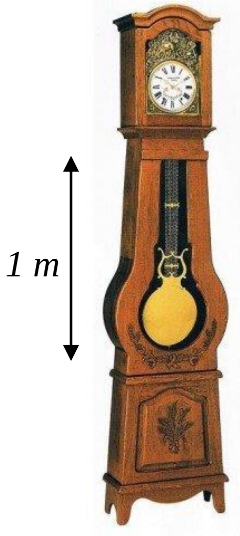
8. L’oscillateur harmonique

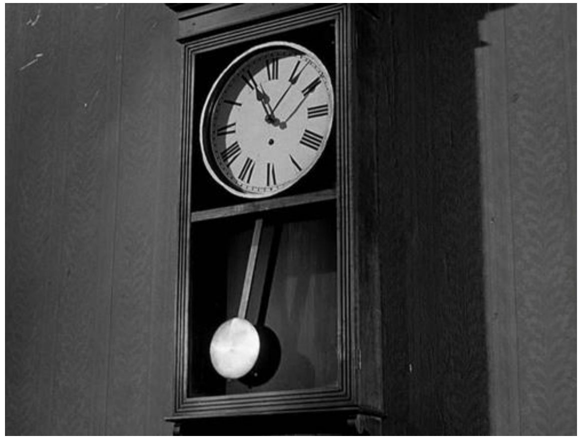
■ Une application des oscillateurs : l’horloge



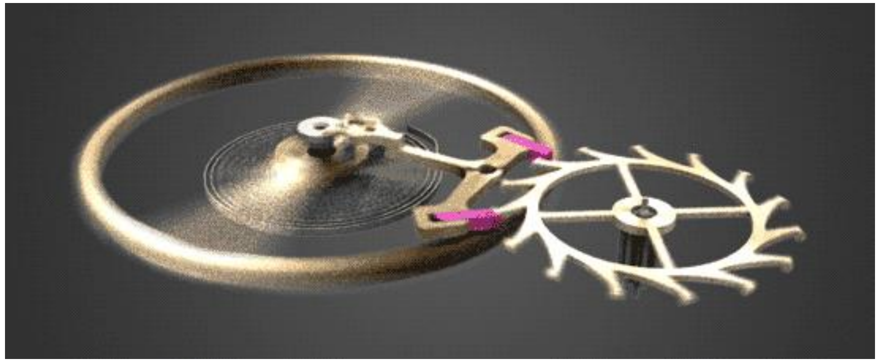
Première horloge à pendule construite par l'horloger S. Coster en collaboration avec C. Huygens à La Haye en 1657

précision: 10^{-3} - 10^{-4} *s*



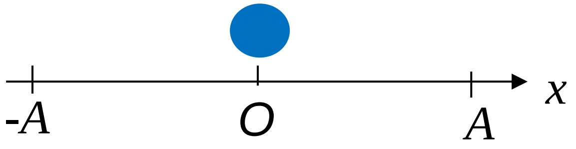


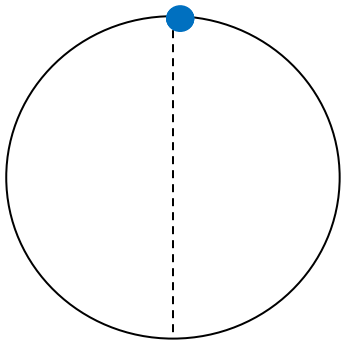
1777 : l'horloger suisse Abraham Louis Perrelet crée la première montre automatique

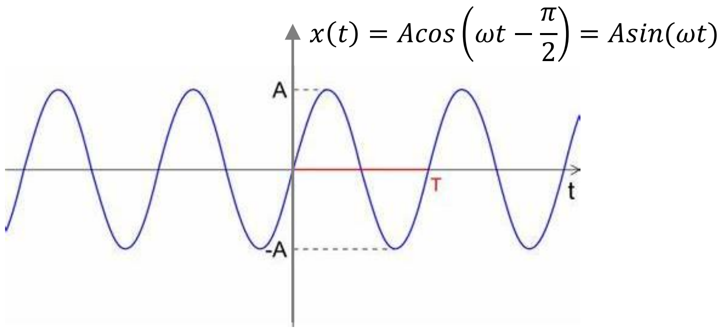


8.1. L'oscillateur harmonique – modèle

■ Généralités







Par définition, un objet ponctuel se déplaçant le long d'un axe Ox présente un mouvement sinusoïdal lorsque sa position en fonction du temps est donnée par

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\sin(\omega_0 t + \phi')}$$

Si ω_0 est indépendante de l'amplitude
$\Rightarrow$ l'oscillateur est dit « harmonique »

avec A *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation*
$\phi\,(\phi')$ *phase initiale (à $t = 0$) avec $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$*

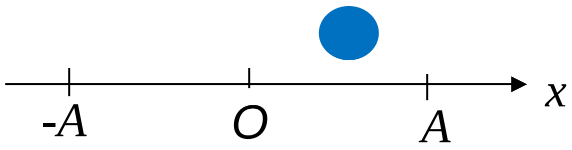
L'amplitude et la phase sont déterminées par les conditions initiales

La position de la particule se répète à un intervalle de temps régulier (période) : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

La fréquence est donnée par $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ unité : s^{-1} ou Hz

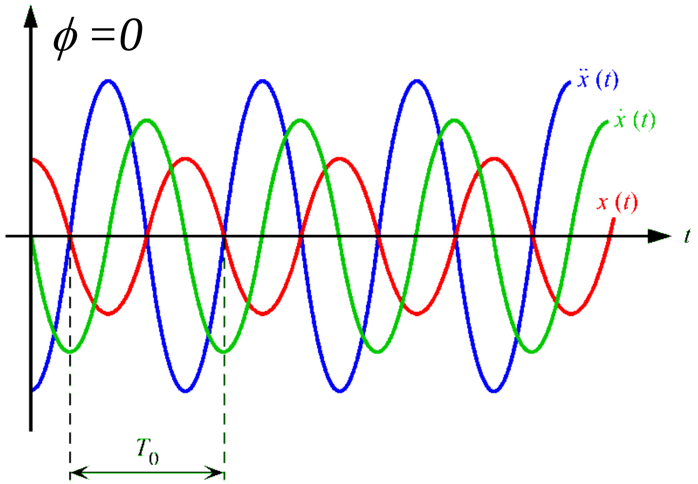
8.1. L'oscillateur harmonique – modèle

- La position $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$



- La vitesse $\dot{x} = v = \dfrac{dx}{dt} = -\,\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$

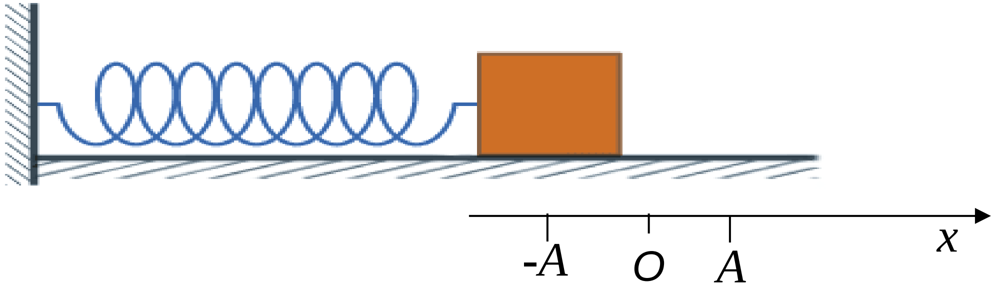
- L'accélération $\ddot{x} = a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi) = -\,\omega_0^2\, x$



L'accélération *est toujours proportionnelle et opposée au* ***déplacement*** **:** $\boxed{\ddot{x}} = -\omega_0^2 \boxed{x}$

8.2. L'oscillateur harmonique

■ L'oscillateur « masse et ressort » (sans la force de gravitation g ni frottement)



On applique la 2nde loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k\vec{x}$ *force de rappel du ressort avec l'origine à l'extrémité du ressort.*

Equation différentielle du mouvement *(projection sur Ox)* **:**

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = -\omega_0^2\, x}$$

Equation différentielle du mouvement

8.2. L'oscillateur harmonique

■ L'oscillateur « masse et ressort » (sans la force de gravitation ni frottement)

On peut remarquer que la relation $\ddot{x} = -\omega_0^2\, x$ est aussi obtenue en posant $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

En effet : $\ddot{x} = -\,\omega_0^2\, A\cos(\omega_0 t + \phi) = -\,\omega_0^2\; x$

Les solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ sont donc de la forme :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

A, ϕ sont des constantes du mouvement qui dépendent des conditions initiales

En posant $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi')}$$

Cette forme est aussi une solution de l'équation de mouvement

8.2. L'oscillateur harmonique

Etude des solutions de l'équation différentielle de mouvement $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ *et* $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t)$ *sont des solutions particulières qui décrivent un mouvement oscillatoire avec des conditions initiales telles que*

- *la masse est en* $x=x_0$ *à* $t=0$ *pour* $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$
- *la masse est en* $x=0$ *à* $t=0$ *pour* $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t)$

Une autre solution serait $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0))$ *si la masse est en* $x=x_0$ *à* $t=t_0$

Cette solution peut être réécrite de la façon suivante : $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0)) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t_0) + x_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0)$$

$$= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \textit{avec } A = x_0 \cos(\omega_0 t_0) \textit{ et } B = x_0 \sin(\omega_0 t_0)$$

$$= x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \textit{avec } \phi = -\omega_0 t_0$$

En résumé, la solution peut s'écrire sous différentes formes :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0))$$

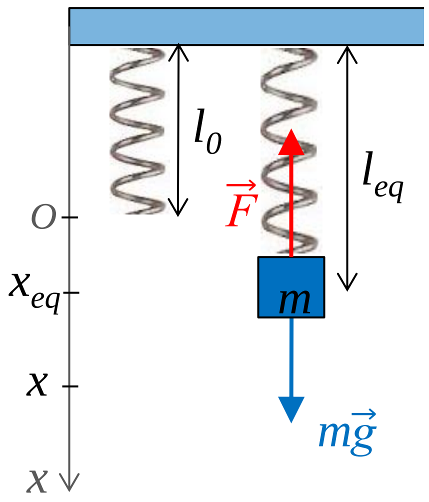
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \Longrightarrow$$ *écriture la plus courante*

Toutes ces solutions sont équivalentes. Elles décrivent le mouvement d'un oscillateur harmonique.
Les constantes t_0, x_0, ϕ, A, B, sont définies par les conditions initiales.

L'oscillateur « masse et ressort » avec la force de gravitation

Equation différentielle du mouvement du ressort avec une masse m dans un champ de pesanteur :



A l'équilibre : 2nde loi de Newton ⇒ $m\vec{a} = \vec{0} = -k\vec{r} + m\vec{g}$

On pose l'axe Ox avec l'origine définie à l'extrémité du ressort de longueur l_0 sans masse accrochée. L'allongement sera donc x avec $x = l - l_0$

Projection sur Ox :

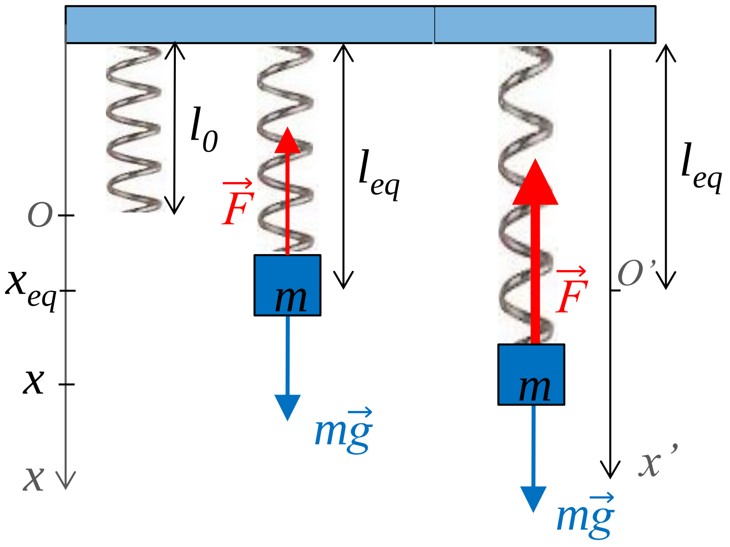
$$ma = 0 = -k\, x_{eq} + mg$$

$$d'où\ x_{eq} = \frac{mg}{k}$$

$$et\ l_{eq} = l_0 + x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

L’oscillateur « masse et ressort » avec la force de gravitation

Equation de mouvement du ressort avec une masse m dans un champ de pesanteur :



On tire sur la masse m et on la lâche. On part d’une position position dite hors équilibre

2[nde] loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} + m\vec{g}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e}_x = x\vec{e}_x$

Projection sur Ox de la 2[nd] loi de Newton :

$$ma = -k\,x + mg = -k\,(x - \frac{mg}{k})$$

or $\frac{mg}{k} = x_{eq}$ d’où $ma = -k\,(x - x_{eq})$

En prenant un repère O’x’ tel que x’=0 corresponde à la position d’équilibre et $x' = x - x_{eq}$, nous avons :

$$ma' = m\,\frac{d^2x'}{dt^2} = -kx'$$

soit

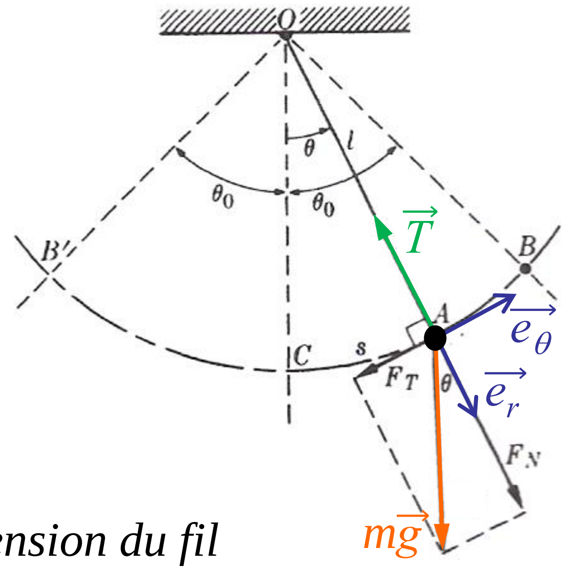
$$\boxed{\frac{d^2x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}}$$

Equation différentielle du mouvement

On remarque que g n’apparait pas. La pesanteur ne fait que changer la position d’équilibre mais pas le mouvement oscillatoire.

Le pendule

Système : une masse m au bout d'un fil de longueur l *(de masse négligeable)*



$\vec{T}$ *est la tension du fil*

$m\vec{g}$ *est le poids*

<u>Equation différentielle du mouvement</u> :

Accélération en coordonnées polaires :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$r = l = cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \quad d'où\ a_\theta = l\ddot{\theta}$$

suivant $\vec{e_\theta}$: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ *(composante tangentielle F_T du poids)*

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

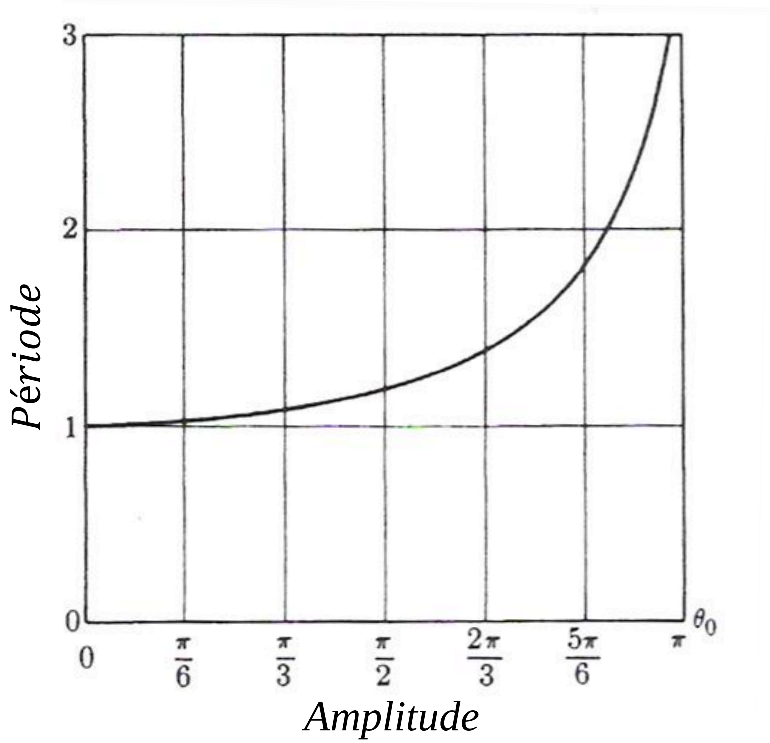
Equation différentielle d'un pendule

On peut remarquer que cette équation différentielle est celle d'un oscillateur mais qu'elle diffère de celle du ressort : cet oscillateur n'est pas harmonique

Le pendule

Evolution de la période avec l'amplitude pour un pendule

Evolution de la période en fonction de θ_0 (i.e. amplitude)



La période augmente lorsque l'amplitude augmente, lorsque celle-ci est supérieure à $\sim \frac{\pi}{6}$

⇨ *le pendule n'est pas un oscillateur harmonique pour les grandes amplitudes ($\theta \gtrsim 15°$)*

8.2. L'oscillateur harmonique

■ Le pendule

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0}$$

Equation différentielle du mouvement du pendule
$\Rightarrow$ oscillateur non-harmonique (la période dépend de l'amplitude)

Pour les faibles amplitudes, c'est-à-dire pour les petits angles, alors sin$\theta \approx \theta$, soit :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad avec \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Equation différentielle du mouvement du pendule dans l'approximation des petites amplitudes
$\Rightarrow$ oscillateur harmonique

Les solutions sont alors de la forme : $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ $(= \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$

Rem. 1 : La période du pendule vaut $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ ⇨ *indépendante de la masse*

Rem. 2 : analogie avec le ressort $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

8.2. L'oscillateur harmonique

■ Energie mécanique d'un oscillateur « masse et ressort »

Energie cinétique :

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\,\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

or $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ et $x^2 = A^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$

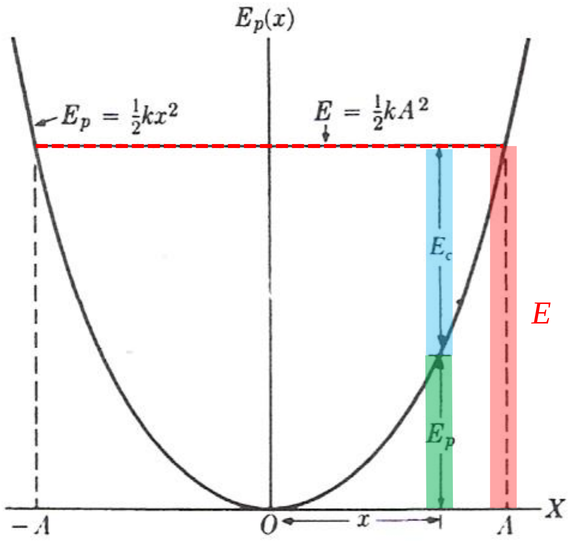
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 (A^2 - x^2)}$$

L'énergie cinétique est maximum pour $x=0$ et nulle aux extrémités ($x=\pm A$)

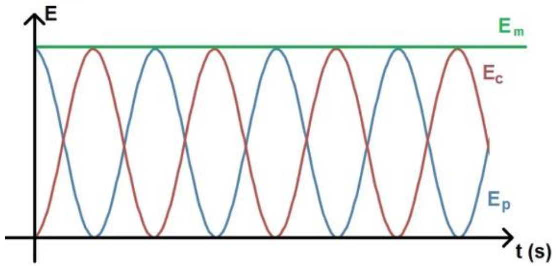
Energie potentielle :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2}$$

L'énergie potentielle est nulle pour $x=0$ et maximum aux extrémités



E_p et E_c dépendent de la position et donc du temps



$$\boxed{E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2}$$

Energie mécanique de l'oscillateur

L'énergie mécanique est constante au cours du mouvement (si pas de dissipation)

8.3. L'oscillateur harmonique – traitement par l'énergie

Equation différentielle du mouvement à partir de l'énergie mécanique

Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Energie mécanique : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

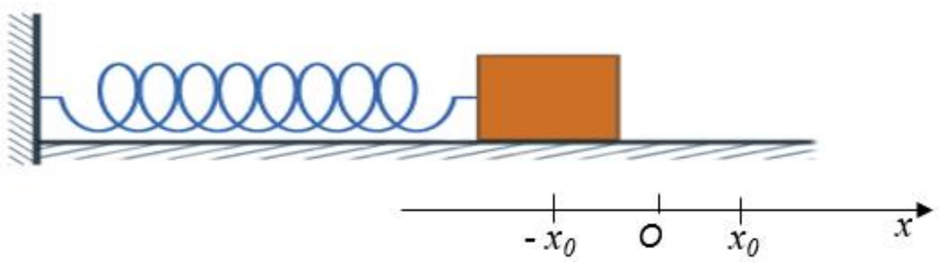
L'énergie mécanique est constante (conservation de l'énergie) : $\frac{d}{dt} E = 0$

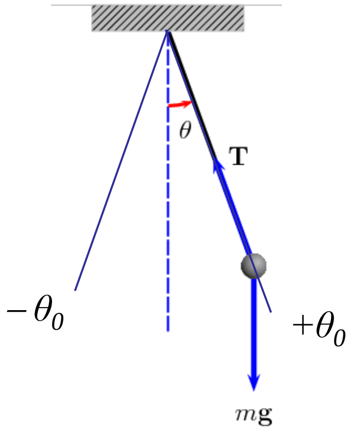
$$\frac{d}{dt} E = 0 = \frac{1}{2} m \, 2 \, \dot{x} \, \ddot{x} + \frac{1}{2} k \, 2 \, \dot{x} \, x = \dot{x} \, [m \, \ddot{x} + kx]$$

La seule solution non triviale est : $m \, \ddot{x} + kx = 0$ *(si $\dot{x}$=0, alors x=cte, pas de mouvement)*

soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \, x = 0}$ *Equation différentielle de l'oscillateur harmonique*

Résumé : l'oscillateur harmonique





Ressort + Masse

Equation différentielle du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \; (= x_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

avec x_0 *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation propre de l'oscillateur*
$\phi\,(\phi')$ *phase initiale (à $t = 0$)*

Pendule

Equation différentielle du mouvement :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad avec \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Approximation aux petits angles ($\sin\theta \approx \theta$)

Les solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \; (= \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

avec θ_0 *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation propre de l'oscillateur*
$\phi\,(\phi')$ *phase initiale (à $t = 0$)*

Si ω_0 est indépendante de l'amplitude $\Rightarrow$ oscillateur harmonique
La position de la particule se répète à un intervalle de temps régulier (période) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$